PART2　交点の位置ベクトル（係数比較）

例題

△ABC において, 辺 AB を 1:2 に内分する点を D, 辺 AC を 3:2 に内分する点を E とし, 線分 BE と線分 CD の交点を P とする。$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{c}$ として, $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ を $\vec{b}$, $\vec{c}$ を用いて表せ。

Point Pickup

練習

$\triangle$OAB において，辺 OA を 2：1 に内分する点を C，辺 OB の中点を D とし，線分 AD と線分 BC の交点を P とする。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ として，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

第12講　PART2 確認問題

1　$\triangle$OAB において，辺 OA を 2：1 に内分する点を C，辺 OB を 3：2 に内分する点を D とし，線分 AD と線分 BC の交点を P とする。$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ として，$\overrightarrow{OP}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ で表す。

AP：PD$=s$：$(1-s)$ とすると，

$$\overrightarrow{OP}=(1-s)\vec{a}+\frac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}s\vec{b}$$

BP：PC$=t$：$(1-t)$ とすると，

$$\overrightarrow{OP}=\frac{\boxed{ウ}}{\boxed{エ}}t\vec{a}+(1-t)\vec{b}$$

よって，s，t の値は，$s=\boxed{オ}$，$t=\boxed{カ}$ であるから，

$$\overrightarrow{OP}=\frac{\boxed{キ}}{\boxed{ク}}\vec{a}+\frac{\boxed{ケ}}{\boxed{コ}}\vec{b}$$ である。

$\boxed{オ}$，$\boxed{カ}$ は，次の①～⑥のうちから選べ。

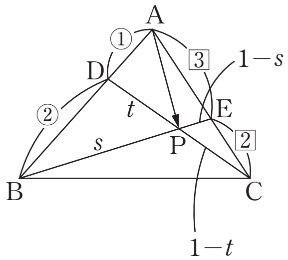
① $\frac{1}{3}$　② $\frac{2}{3}$　③ $\frac{2}{5}$

④ $\frac{3}{5}$　⑤ $\frac{4}{9}$　⑥ $\frac{5}{9}$

PART2　交点の位置ベクトル(係数比較)

例題

△ABC において, 辺 AB を 1:2 に内分する点を D, 辺 AC を 3:2 に内分する点を E とし, 線分 BE と線分 CD の交点を P とする。$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{c}$ として, $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ を $\vec{b}$, $\vec{c}$ を用いて表せ。



BP : PE$=s:(1-s)$ とおくと

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(1-s)\overrightarrow{\mathrm{AB}}+s\overrightarrow{\mathrm{AE}}$$

$$=(1-s)\overrightarrow{\mathrm{AB}}+s\times\frac{3}{5}\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(1-s)\vec{b}+\frac{3}{5}s\vec{c}\ \cdots\cdots ①$$

DP : PC$=t:(1-t)$ とおくと

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{AD}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(1-t)\times\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\frac{1}{3}(1-t)\vec{b}+t\vec{c}\ \cdots\cdots ②$$

①, ②より　$(1-s)\vec{b}+\frac{3}{5}s\vec{c}=\frac{1}{3}(1-t)\vec{b}+t\vec{c}$

$\vec{b}$, $\vec{c}$ は1次独立であるから

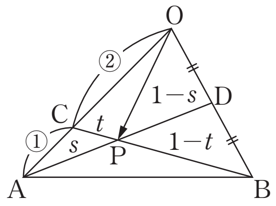
$$1-s=\frac{1}{3}(1-t),\quad \frac{3}{5}s=t$$

よって　$s=\frac{5}{6}$, $t=\frac{1}{2}$

したがって　$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\frac{1}{6}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}$

練習

△OAB において，辺 OA を 2：1 に内分する点を C，辺 OB の中点を D とし，線分 AD と線分 BC の交点を P とする。$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ として，$\overrightarrow{OP}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。



AP：PD＝s：$(1-s)$ とおくと

$$\overrightarrow{OP}=(1-s)\overrightarrow{OA}+s\overrightarrow{OD}$$

$$=(1-s)\overrightarrow{OA}+s\times\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}=(1-s)\vec{a}+\frac{1}{2}s\vec{b}\ \cdots\cdots\ ①$$

CP：PB＝t：$(1-t)$ とおくと

$$\overrightarrow{OP}=(1-t)\overrightarrow{OC}+t\overrightarrow{OB}=(1-t)\times\frac{2}{3}\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}=\frac{2}{3}(1-t)\vec{a}+t\vec{b}\ \cdots\cdots\ ②$$

①，②より　$(1-s)\vec{a}+\frac{1}{2}s\vec{b}=\frac{2}{3}(1-t)\vec{a}+t\vec{b}$

$\vec{a}$，$\vec{b}$ は 1 次独立であるから

$$1-s=\frac{2}{3}(1-t),\ \frac{1}{2}s=t$$

よって　$s=\frac{1}{2}$，$t=\frac{1}{4}$

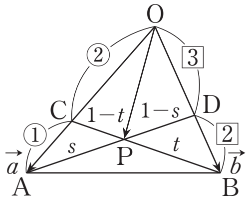
したがって　$\overrightarrow{OP}=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{b}$

第12講　PART2 確認問題 解答

1

[正解] ア：3，イ：5，ウ：2，エ：3，オ：⑥，
カ：②，キ：4，ク：9，ケ：1，コ：3

[解説]



AP：PD＝s：$(1-s)$ とすると [A]

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(1-s)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+s\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ [B]

$=\boldsymbol{(1-s)\vec{a}+\frac{3}{5}s\vec{b}}$ ……①

BP：PC＝t：$(1-t)$ とすると

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OB}}+t\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ [B]

$=\boldsymbol{\frac{2}{3}t\vec{a}+(1-t)\vec{b}}$ ……②

①，②より

$$(1-s)\vec{a}+\frac{3}{5}s\vec{b}=\frac{2}{3}t\vec{a}+(1-t)\vec{b}$$

$\vec{a}$，$\vec{b}$ は $\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$ であり，平行でないから，

$1-s=\frac{2}{3}t$，$\frac{3}{5}s=1-t$ [C]

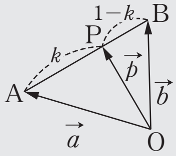
これを解いて　$\boldsymbol{s=\frac{5}{9}}$，$\boldsymbol{t=\frac{2}{3}}$

$s=\frac{5}{9}$ を①に代入して，

$$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{4}{9}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}}$$

[A]　AP：PD，BP：PC を文字でおいて，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を2通りの式で表す。

[B]　線分 AB を内分する点 P について，3点 A，B，P の位置ベクトルをそれぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{p}$ とすると，
$\vec{p}=(1-k)\vec{a}+k\vec{b}$ $(0<k<1)$
と表される。



[C]　$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$ かつ $\vec{a}$ と $\vec{b}$ が平行でないとき，
$s\vec{a}+t\vec{b}=s'\vec{a}+t'\vec{b}$
$\Longleftrightarrow s=s'$，$t=t'$